



2013年理系第2問

2 行列  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  で定まる座標平面上の1次変換を  $f$  とする。ただし、 $a, b$  は実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 原点  $O$  とは異なる点  $P(x, y)$  を  $f$  で移した点を  $Q$  とする。このとき、長さの比の値  $\frac{OQ}{OP}$  は  $P$  によらないことを示し、その値を  $a, b$  を用いて表せ。

(2) 正の整数  $n$  に対して、 $A^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$  とするとき、

$$p_n^2 + r_n^2 = (a^2 + b^2)^n, \quad q_n^2 + s_n^2 = (a^2 + b^2)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $109^2 = l^2 + m^2$  を満たす正の整数  $l, m$  を一組求めよ。