



2016年医学部第3問

3 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C: y = f(x)$ を考える. p を正の数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. また, すべての x について

$$\{(ax + b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a, b の値を求めよ.

(2) 曲線 C 上の点 $P(p, f(p))$ における C の接線を $l: y = c(x - p) + d$ とする. c と d の値を p を用いて表せ. さらに, 区間 $x \geq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x - p) + d\}$ の増減を調べ, 不等式

$$f(x) \geq c(x - p) + d \quad (x \geq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $x \geq 0$ の範囲で, 曲線 C と接線 l , および y 軸で囲まれた図形を F とする. その面積 $S(p)$ を求めよ.

(4) 2辺が x 軸, y 軸に平行な長方形 R を考える. R が図形 F を囲んでいるとき, R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ. さらに, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ.