2014年 第4問

数理 石井K

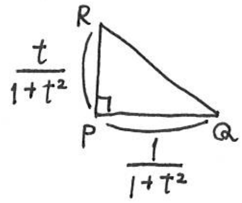
$\boxed{4}$ 0でない実数tに対して，座標空間における3点$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{1+t^2},\ 0\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ 0,\ \dfrac{t}{1+t^2}\right)$を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 三角形PQRの面積を$S(t)$とする．実数tが$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値とそのときの$t$の値を求めよ．

(2) 実数tが$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$の範囲を動くとき，三角形PQRが通過してできる立体の体積Vを求めよ．

(1) $\overrightarrow{PQ} = \left(0,\ \dfrac{1}{1+t^2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{PR} = \left(0,\ 0,\ \dfrac{t}{1+t^2}\right)$ より $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$

よって $PQ \perp PR$



$\therefore \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ において $\dfrac{t}{1+t^2} > 0$ より

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)^2}$$

$$S'(t) = \frac{2(1+t^2)^2 - t \cdot 4(1+t^2) \cdot 2t}{4(1+t^2)^4} = \frac{(1+t^2) - 4t^2}{2(1+t^2)^3} = \frac{1-3t^2}{2(1+t^2)^3}$$

$\therefore$ $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $S(t)$ は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{32}$ をとる //

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	$\frac{4}{25}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{32}$	$\searrow$	$\frac{1}{8}$

極大

(2)
$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} S(t)\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{2(1+t^2)^2}\,dt$$

置換積分 $x = 1+t^2$ とおく $dx = 2t\,dt$

t	$\frac{1}{2} \to 1$
x	$\frac{5}{4} \to 2$

$$= \int_{\frac{5}{4}}^{2} \frac{1}{4x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{5}{4}}^{2}$$

$$= \frac{3}{40}$$ //