2015 年 理系 第 4 問

$\boxed{4}$ $a>0$ を実数とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\quad ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}\,dx,\qquad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$$

とおく．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．