2014年 医学部 第2問

1枚目/2枚.

数理 石井K

2 0以上の整数 n に対して，

$$g_n(x) = e^{-n}(x-n)(n+1-x)$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $n \leqq x \leqq n+1$ において，曲線 $y = g_n(x)$ 上の点 $(\alpha,\ g_n(\alpha))$ における接線の傾きが $-g_n(\alpha)$ となる α を求めよ．

(2) $f(x) = ce^{-x}$ $(c > 0)$ とおく．曲線 $y = f(x)$ が曲線 $y = g_n(x)$ と共有点をもち，その点におけるそれぞれの曲線の接線が一致するような c を求めよ．

(3) 曲線 $y = g_n(x)$ と (2) で求めた曲線 $y = f(x)$ の共有点を P_n とし，点 P_n における $y = f(x)$ の接線を ℓ_n とする．また，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n とする．曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ_n，および点 Q_n を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を S_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$ を求めよ．

(1) $g_n(x) = -e^{-n}(x-n)\{x-(n+1)\}$

$= -e^{-n}\{x^2-(2n+1)x+n(n+1)\}$

$\therefore g_n'(x) = -e^{-n}\cdot(2x-2n-1)$

$g_n'(\alpha) = -g_n(\alpha)$ より．$-e^{-n}\cdot(2\alpha-2n-1) = e^{-n}\{\alpha^2-(2n+1)\alpha+n(n+1)\}$

$\therefore e^{-n}\{\alpha^2-(2n-1)\alpha+n^2-n-1\}=0$ $\quad e^{-n}>0$ より $\quad \alpha = \dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}$

$\therefore \alpha = n-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad n\leqq\alpha\leqq n+1$ より． $\underline{\alpha = n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ //

(2) 共有点のx座標を β とおくと，$f(\beta)=g_n(\beta)$ かつ $f'(\beta)=g_n'(\beta)$

$\therefore ce^{-\beta} = -e^{-n}\{\beta^2-(2n+1)\beta+n(n+1)\}$ $\cdots$①

$-ce^{-\beta} = -e^{-n}(2\beta-2n-1)$ $\cdots$②

①+② の方程式は (1) で考えたものと同じなので $\beta = n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

① に代入すると．$ce^{-n-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = -e^{-n}\left\{n^2+(\sqrt{5}-1)n+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}-(\sqrt{5}-1)n-2n^2-n-\frac{\sqrt{5}-1}{2}+n^2+n\right\}$

これを解いて，$\underline{c = (\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$ //

2枚目につづく

0001854095418999

秋田大学

2014年 医学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 0以上の整数 n に対して，

$$g_n(x) = e^{-n}(x-n)(n+1-x)$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $n \leqq x \leqq n+1$ において，曲線 $y = g_n(x)$ 上の点 $(\alpha,\ g_n(\alpha))$ における接線の傾きが $-g_n(\alpha)$ となる α を求めよ．

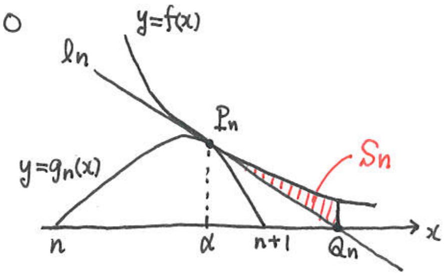
(2) $f(x) = ce^{-x}$ $(c > 0)$ とおく．曲線 $y = f(x)$ が曲線 $y = g_n(x)$ と共有点をもち，その点におけるそれぞれの曲線の接線が一致するような c を求めよ．

(3) 曲線 $y = g_n(x)$ と (2) で求めた曲線 $y = f(x)$ の共有点を P_n とし，点 P_n における $y = f(x)$ の接線を ℓ_n とする．また，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n とする．曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ_n，および点 Q_n を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を S_n とする．$\lim_{n\to\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$ を求めよ．

(3) $n \leqq x \leqq n+1$ において，$g_n(x) \geqq 0$ であり，$g_n(n) = g_n(n+1) = 0$

また，$f(x)$ は (2) より 単調減少 かつ $f(x) > 0$

∴ グラフは右のようになる．



∴ P_n の x 座標 を (1) で 求めた α で 表すと，

$$\ell_n:\ y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$
$$= -ce^{-\alpha}(x-\alpha) + ce^{-\alpha}$$
$$= -ce^{-\alpha}x + (\alpha+1)ce^{-\alpha}$$

∴ $Q_n(\alpha+1,\ 0)$

$$∴ S_n = \int_{\alpha}^{\alpha+1} ce^{-x} + ce^{-\alpha}x - (\alpha+1)ce^{-\alpha}\,dx$$
$$= \left[-ce^{-x} + \frac{1}{2}ce^{-\alpha}x^2 - (\alpha+1)ce^{-\alpha}x\right]_{\alpha}^{\alpha+1}$$
$$= -ce^{-\alpha-1} + \frac{1}{2}ce^{-\alpha}$$
$$= \frac{(e-2)(\sqrt{5}-2)}{2e}e^{-n}$$

無限等比級数

$$\lim_{n\to\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n) = \frac{(e-2)(\sqrt{5}-2)}{2e}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \underline{\frac{(e-2)(\sqrt{5}-2)}{2(e-1)}}\ //$$