2015年 文系 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 2次関数 $y = f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 Q$(a,\ 0)$ を通るものとする．ただし，$0 < a < 1$ である．関数 $y = x^2$ のグラフを C，関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする．点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき

$$(2a-1)m = 2an$$

が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を x と a の式で表せ．

(2) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3) (2) で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ．

(1) $y=f(x)$ が原点と $(a,0)$ を通ることより，

上に凸より

$f(x) = cx(x-a)$ とおける（c は負の定数）

このとき，$x^2 - cx(x-a) = 0 \iff x\{(1-c)x + ac\} = 0$

$\therefore$ P の x 座標は，$x = \dfrac{ac}{c-1}$

C において，$y' = 2x$，D において $y' = 2cx - ac$ より

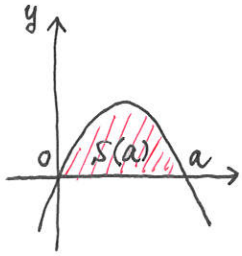
$m = 2\cdot\dfrac{ac}{c-1}$，$n = 2c\cdot\dfrac{ac}{c-1} - ac$

$\therefore (2a-1)m = 2an \iff \dfrac{(2a-1)\cdot 2ac}{c-1} = 2a\cdot ac\cdot\left(\dfrac{2c}{c-1} - 1\right)$

$\iff ac(a-1-ac) = 0$

$0<a<1$，$c<0$ より，$a-1-ac=0$　$\therefore c = \dfrac{a-1}{a}$

$\therefore \underline{f(x) = \left(1-\dfrac{1}{a}\right)x^2 - (a-1)x}$ //



(2) $S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

$= \left(1-\dfrac{1}{a}\right)\displaystyle\int_0^a x(x-a)\,dx$

$= \left(1-\dfrac{1}{a}\right)\cdot\left(-\dfrac{a^3}{6}\right)$ $= \underline{\dfrac{a^2(1-a)}{6}}$ //

2015年 文系 第4問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 2次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする．ただし，$0<a<1$ である．関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする．点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき

$$(2a-1)m=2an$$

が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を x と a の式で表せ．

(2) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3) (2) で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ．

(3) (2)より $S(a)=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a^2$

$\therefore S'(a)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a$

$=-\frac{a}{6}\cdot(3a-2)$

$\therefore S'(a)=0$ となる a で $0<a<1$ を満たすのは $a=\frac{2}{3}$

増減表より．

$S(a)$ の $0<a<1$ における最大値は．

$S\left(\frac{2}{3}\right)=\underline{\frac{2}{81}}$ //

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	