



2012年第4問

4 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_n(1 - \log x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めることにする. e を自然対数の底として, 以下の問に答えよ.

- (1) 実数 x が $0 < x < e$ のとき, $\frac{1}{e}(e-x) < 1 - \log x < \frac{1}{x}(e-x)$ となることを示せ.
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $1 \leq x_n < e$ であることを示せ.
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $e - x_{n+1} < \left(1 - \frac{1}{e}\right)(e - x_n)$ であることを示せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ であることを示せ.