学習院大学

2013年 法学部 第2問

$\boxed{2}$ a, b, cを実数とする.

(1) 不等式

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$$

を証明せよ. また, 等号が成り立つとき$a=b=c$であることを証明せよ.

(2) 不等式

$$27(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)^4$$

を証明せよ.

(1) (左辺) − (右辺) $= 3a^2+3b^2+3c^2-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

$= 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$\geqq 0$

0になるのは $a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$ $\Leftrightarrow a=b=c$

∴ 与式は成り立つ (等号成立は $a=b=c$ のとき) ▨

(2) (1)の式に $a=3x^2$, $b=3y^2$, $c=3z^2$ を代入すると.

$3(9x+9y+9z) \geqq (3x^2+3y^2+3z^2)^2$

すなわち. $27(x^4+y^4+z^4) \geqq 9(x^2+y^2+z^2)^2$ …① が成り立つ

ここで (1)の式より. $3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$ …② であるから

② を ① に代入して, $x=a$, $y=b$, $z=c$ とすると.

$27(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)^4$ ▨