0000057845124999 9

東京学芸大学

2012年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^{-x}$ について，下の問いに答えよ．ただし，α，β は定数とする．

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるための α，β の条件を求めよ．

(3) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとり，さらに点 $(4,\ f(4))$ が曲線 $y = f(x)$ の変曲点となるように α，β の値を定め，関数 $y = f(x)$ の極値と，その曲線の変曲点をすべて求めよ．

(1) $f'(x) = (2x+\alpha)e^{-x} + (x^2+\alpha x+\beta)\cdot(-e^{-x})$

$= \underline{\left\{-x^2+(2-\alpha)x+\alpha-\beta\right\}e^{-x}}$ //

$f''(x) = (-2x+2-\alpha)e^{-x} + \left\{-x^2+(2-\alpha)x+\alpha-\beta\right\}\cdot(-e^{-x})$

$= \underline{\left\{x^2+(\alpha-4)x+\beta-2\alpha+2\right\}e^{-x}}$ //

(2) $f(x)$ が $x=1$ で極値をとる $\iff f'(1)=0$ かつ $f''(1) \neq 0$

$\iff \beta = 1$ かつ $-\alpha+\beta \neq 1$

$\iff \underline{\alpha \neq 0 \text{ かつ } \beta = 1}$ //

(3) $f''(4) = 0$ より，$2\alpha+\beta+2=0$ さらに(2)の条件もみたすので

$\alpha = -\frac{3}{2}$，$\beta = 1$

このとき，$f'(x) = \left(-x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}(x-1)(2x-5)e^{-x}$

$f''(x) = \left(x^2-\frac{11}{2}x+6\right)e^{-x} = \frac{1}{2}(x-4)(2x-3)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2e}$	↗	$e^{-\frac{3}{2}}$	↗	$\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$	↘	$\frac{11}{e^4}$	↘

よって増減表は左のようになる．

$\therefore\ \underline{\alpha = -\frac{3}{2},\ \beta = 1}$ //

$\underline{\text{極小値 } \frac{1}{2e}\ (x=1 \text{ のとき})}$ //

$\underline{\text{極大値 } \frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}\ (x=\frac{5}{2} \text{ のとき})}$ //

$\underline{\text{変曲点 } \left(\frac{3}{2},\ e^{-\frac{3}{2}}\right),\ \left(4,\ \frac{11}{e^4}\right)}$ //