2015年 理学部（数理） 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ について，次の問に答えよ．ただし，a_1，a_2，a_3 は負の実数とする．

(1) $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を1つずつもつことを示せ．
　$f'(x)=0$ の正の実数解を α，負の実数解を β とおくとき，$-\alpha<\beta$ を示せ．

(2) $f(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つであることを示せ．

(3) $f(x)+f(-x)<0$ を示せ．

(4) $f(x)=0$ の正の実数解を p とおく．$x\leqq -p$ のとき，$f(x)<0$ を示せ．

(1) $f'(x)=3x^2+2a_1x+a_2$

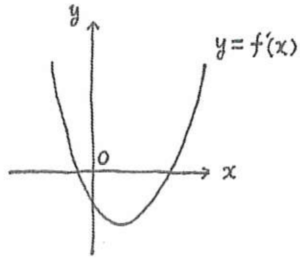
$f'(x)=0$ の判別式を D とおくと

$D/4=a_1^2-3a_2>0$ $(\because a_2<0)$

よって，$f'(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつ

また，$f'(0)=a_2<0$ $(\because a_2<0)$ であることから

$y=f'(x)$ のグラフは右のようになる．



$\therefore$ $f'(x)=0$ は正の実数解と負の実数解を1つずつもつ ▨

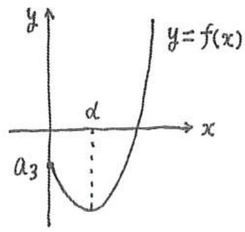
次に，軸の方程式は，a_1 を用いて，$x=-\dfrac{a_1}{2}>0$ $(\because a_1<0)$ であり，

これは，α，β を用いると，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となるので，$\alpha+\beta>0$ すなわち，$-\alpha<\beta$ ▨

(2) (1)より，増減表は右のようになる

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a_3	↘		↗

$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ より グラフは右下のようになる．} \\ f(0)=a_3<0 \end{cases}$



$\therefore$ $f(x)=0$ の正の実数解は，ただ1つである ▨

(3) $f(x)+f(-x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3+(-x)^3+a_1(-x)^2+a_2(-x)+a_3$

$=2a_1x^2+2a_3$

ここで，$2a_1x^2<0$，$2a_3<0$ $(\because a_1, a_3<0)$ であるから．

$f(x)+f(-x)<0$ ▨

2枚目へつづく

000210318698799

山形大学

2015年 理学部（数理） 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ について，次の問に答えよ．ただし，a_1，a_2，a_3 は負の実数とする．

(1) $f'(x) = 0$ は正の実数解と負の実数解を1つずつもつことを示せ．
$f'(x) = 0$ の正の実数解を α，負の実数解を β とおくとき，$-\alpha < \beta$ を示せ．

(2) $f(x) = 0$ の正の実数解は，ただ1つであることを示せ．

(3) $f(x) + f(-x) < 0$ を示せ．

(4) $f(x) = 0$ の正の実数解を p とおく．$x \leqq -p$ のとき，$f(x) < 0$ を示せ．

(4) (2)のグラフより，$x \geqq p$ において $f(x) \geqq 0$

ここで，$t = -x$ とおくと，$-t \geqq p$ において，$f(-t) \geqq 0$

すなわち，$t \leqq -p$ において，$f(-t) \geqq 0$ …①

また，(3)より，$f(t) + f(-t) < 0 \iff f(t) < -f(-t)$ …②

①，②より，$x \leqq -p$ のとき，$f(x) < -f(-x) \leqq 0$ すなわち $f(x) < 0$ ▨