

2012年理(数理情報科・応用物理・応用化学)第2問

2 記号 $(0, \infty)$ は、正の実数全体からなる区間を表すものとする。1 より大きい実数 r と、区間 $(0, \infty)$ で連続な関数 $f(x)$ に対する、定積分

$$\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx \quad \text{と} \quad \int_1^{r^3} f\left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$$

について考える。

(1) r を 1 より大きい実数とする。

(i) 定積分 $\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx$ と $\int_1^{r^3} \left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

(ii) 定積分 $\int_1^{r^2} \left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right)^2 \frac{1}{x} dx$ と $\int_1^{r^3} \left(x + \frac{r^6}{x}\right)^2 \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

(2) 次の問いに答えよ。

(i) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式

$$\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx = a \int_1^{r^6} f\left(t + \frac{r^6}{t}\right) \frac{1}{t} dt$$

が成立するような、定数 a の値を求めよ。

(ii) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式

$$\int_1^{r^3} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx = b \int_{r^3}^{r^6} f\left(t + \frac{r^6}{t}\right) \frac{1}{t} dt$$

が成立するような、定数 b の値を求めよ。

(iii) 1 より大きいすべての実数 r と区間 $(0, \infty)$ で連続なすべての関数 $f(x)$ に対して等式

$$\int_1^{r^2} f\left(x^3 + \frac{r^6}{x^3}\right) \frac{1}{x} dx = c \int_1^{r^3} f\left(x + \frac{r^6}{x}\right) \frac{1}{x} dx$$

が成立するような、定数 c の値を求めよ。