九州工業大学

2015年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ 初項1，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1 = \left[\dfrac{4}{3}\right] = 1$，$b_2 = [2] = 2$，$b_3 = \left[\dfrac{8}{3}\right] = 2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

$$\begin{array}{cccc} |\ a_1 & |\ a_2,\ a_3 & |\ a_4,\ a_5 & |\ a_6,\ \cdots \\ \text{第1群} & \text{第2群} & \text{第3群} & \cdots \end{array}$$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答えよ．

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 S_{3m} を求めよ．

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 T_{3m} を求めよ．

(3) 1000 は第何群の何番目の数か．

(4) $x \geqq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x + \dfrac{1}{2}$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m} (\sqrt{c_k} - k) < \frac{m}{2}$$