

2013年 第4問

4 ひとつのさいころを3回続けて投げて、出た目を順に X, Y, Z とする。また、 $A = \frac{Y}{X}$, $B = \frac{X}{Y}$, $C = \frac{Y}{Z}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) A のとりうる値のなかで、その値をとる確率が最も大きくなるような A の値を求めよ。
 (2) A の期待値を求めよ。
 (3) A と B の値がいずれも2以下である確率を求めよ。
 (4) B と C の値がいずれも1未満である確率を求めよ。

(1) 右の表より、 $A=1$ // (6通りあるので)

$$\begin{aligned}
 (2) E(A) &= 1 \cdot (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{36} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{36} \\
 &\quad + \frac{1}{3} (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{36} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{36} \\
 &= \frac{1}{36} \cdot (1+2+3+4+5+6) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \\
 &= \frac{1}{36} \cdot 21 \cdot \frac{49}{20} \\
 &= \frac{343}{240} //
 \end{aligned}$$

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

Aの値の表

$$\begin{aligned}
 (3) A \leq 2 \text{ かつ } B \leq 2 &\Leftrightarrow A \leq 2 \text{ かつ } \frac{1}{A} \leq 2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq A \leq 2
 \end{aligned}$$

よって右上図の赤で囲んだ範囲なので $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ //

$$\begin{aligned}
 (4) B < 1 \text{ かつ } C < 1 &\Leftrightarrow X < Y \text{ かつ } Y < Z \\
 &\Leftrightarrow X < Y < Z
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{{}^6C_3}{6^3} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54} //$$