

2015年 医学部 第10問

10 楕円 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $L: x - 2y + 10 = 0$ について考える. 楕円 C 上の点 P から直線 L 到下ろした垂線と直線 L の交点を Q とする. 線分 PQ の最大値を M , 最小値を m とするとき, $\frac{M}{m}$ の値を求めよ.

$P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと.

点と直線のキヨリ公式より.

$$\begin{aligned}
 PQ &= \frac{|3\cos\theta - 4\sin\theta + 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\
 &= \frac{|5\sin(\theta - d) - 10|}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{10 - 5\sin(\theta - d)}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = \frac{15}{\sqrt{5}}, \quad m = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \underline{\underline{3}}$$

