福岡教育大学

2016年 中等教育 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和をそれぞれ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2+n}{2}, \quad \log_2(t_n+1) = 2n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき．

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \frac{3n^2+n}{2} - \frac{3(n-1)^2+n-1}{2}$$
$$= 3n-1$$

$n=1$ のときは．$a_1 = s_1 = 2$

これらをまとめると，$\underline{a_n = 3n-1 \ (n=1,2,\cdots)}$ //

(2) $\log_2(t_n+1) = 2n$ より，

$$t_n + 1 = 2^{2n}$$
$$\therefore t_n = 4^n - 1 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき．

$$b_n = t_n - t_{n-1}$$
$$= 4^n - 1 - (4^{n-1} - 1)$$
$$= 4 \cdot 4^{n-1} - 4^{n-1}$$
$$= 3 \cdot 4^{n-1}$$

$n=1$ のときは．$b_1 = t_1 = 3$ （∵①より）

これらをまとめると，$\underline{b_n = 3 \cdot 4^{n-1} \ (n=1,2,\cdots)}$ //

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (3k-1) \cdot 3 \cdot 4^{k-1} = 3\sum_{k=1}^{n} (3k-1) \cdot 4^{k-1}$

$U_n = \sum_{k=1}^{n} (3k-1) \cdot 4^{k-1}$ とおくと，

$$U_n = 2 \cdot 4^0 + 5 \cdot 4^1 + 8 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4^3 + \cdots + (3n-1) \cdot 4^{n-1} \quad \cdots ②$$

$$4U_n = \quad 2 \cdot 4^1 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + \cdots + (3n-4) \cdot 4^{n-1} + (3n-1) \cdot 4^n \quad \cdots ③$$

③－②より，
$$3U_n = -2 \cdot 4^0 - 3(4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1}) + (3n-1) \cdot 4^n$$
$$= -2 - 3 \cdot \frac{4(1-4^{n-1})}{1-4} + (3n-1) \cdot 4^n$$
$$= (3n-2) \cdot 4^n + 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 3U_n = \underline{(3n-2) \cdot 4^n + 2} \ //$$