0000181188189999

高崎経済大学

2011年 経済・地域政策 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$, $a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}=0$ を満たしている．以下の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_n>0$ であることを示せ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とするとき，b_n と b_{n+1} の関係を式で表せ．

(3) 一般項 a_n を求めよ．

(1) 漸化式は $(a_n+1)a_{n+1}=2a_n$ …(*) と表される．

数学的帰納法で $a_n>0$ を示す．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=2>0$ なので成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$a_k>0$

(*) の両辺に k を代入して，$(a_k+1)\neq 0$ でわると，

$$a_{k+1}=\frac{2a_k}{a_k+1}>0$$ となり $n=k+1$ でも成り立つ

(i), (ii) より，すべての自然数 n について $a_n>0$ が成り立つ ■

(2) (1) より $a_n>0$ なので，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{2}{b_n}+\frac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=0$$ 両辺に $b_n\cdot b_{n+1}$ をかけて

$$\underline{b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}}$$ //

(3) (2) より $b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)$

∴ 数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$b_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\underline{\frac{2^n}{2^n-1}}$$ //