0001458451458999

自治医科大学

2013年 第25問

$-(x^2-2x)-3=-(x-1)^2-2$　　$-(x^2-8x)-21$
$-(x-4)^2-5$

数理 石井K

$\boxed{25}$ 曲線 $C_1: y=-x^2+2x-3$ と曲線 $C_2: y=-x^2+8x-21$ の両方に接する直線を L とする．曲線 C_1 と曲線 C_2 と直線 L で囲まれる部分の面積を S とする．$4S$ の値を求めよ．

L は y 軸に平行ではないから $y=ax+b$ と表せる．

$\therefore -x^2+2x-3-(ax+b)=0 \iff x^2+(a-2)x+b+3=0$

これが重解をもつので，判別式 D_1 は

$D_1=(a-2)^2-4(b+3)=0 \quad \therefore a^2-4a-4b-8=0 \cdots ①$

$-x^2+8x-21-(ax+b)=0 \iff x^2+(a-8)x+b+21=0$

これが重解をもつので，判別式 D_2 は

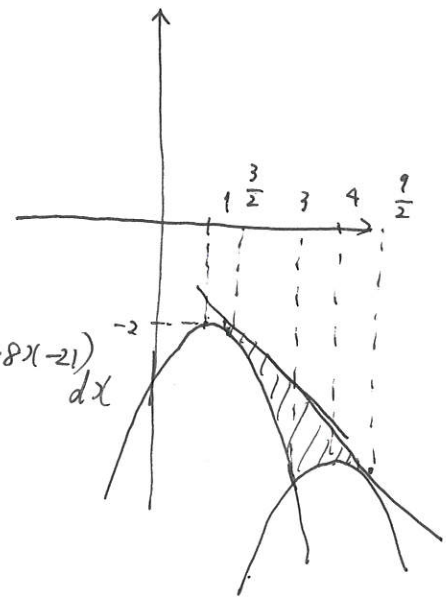
$D_2=(a-8)^2-4(b+21)=0 \quad \therefore a^2-16a-4b-20=0 \cdots ②$

①－②より．$12a+12=0 \quad \therefore a=-1,\ b=-\frac{3}{4}$

C_1 と L の接点は $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$．

C_2 と L の 〃 $\left(\frac{9}{2}, -\frac{21}{4}\right)$

C_1 と C_2 の交点，は $(3, -6)$



$\therefore S=\int_{\frac{3}{2}}^{3} -x-\frac{3}{4}-(-x^2+2x-3)\,dx+\int_{3}^{\frac{9}{2}} -x-\frac{3}{4}-(-x^2+8x-21)\,dx$

$=\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx+\int_{3}^{\frac{9}{2}}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{3}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right)^3\right]_{3}^{\frac{9}{2}}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{4} \quad \therefore 4S=\underline{9}$ //