学習院大学

2013年 経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $y = x^3 - (3a+2)x^2 - 3a^2 - 4a + 4$ が放物線 $y = x^2$ と相異なる3点で交わるための実数 a の値の範囲を求めよ．

曲線と放物線が相異なる3点で交わる

$\Leftrightarrow$ $x^3 - (3a+2)x^2 - 3a^2 - 4a + 4 - x^2 = 0$ が相異なる3つの実数解をもつ

$\therefore$ $f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 - 3a^2 - 4a + 4$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a+1)x$$
$$= 3x\{x - 2(a+1)\}$$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは．$x = 0,\ 2(a+1)$ のとき．

(i) $a > -1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2(a+1)$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ 相異なる3つの実数解をもつのは．

$f(0) \cdot f(2(a+1)) < 0$ のとき．

$$f(0) = -3a^2 - 4a + 4 = -(3a-2)(a+2)$$

$$f(2(a+1)) = -a(4a^2 + 15a + 16) = -a\left\{\left(2a + \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right\}$$

$$\therefore f(0) \cdot f(2(a+1)) = a(3a-2)\underbrace{(a+2)}_{>0}\left\{\underbrace{\left(2a + \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}}_{>0}\right\}$$

$\therefore$ $a(3a-2) < 0$ より．$0 < a < \frac{2}{3}$

(ii) $a = -1$ のとき．

$f'(x) = 3x^2 \geqq 0$ $\therefore$ $f(x)$ は単調増加となり．不適．

(iii) $a < -1$ のとき．

x	$\cdots$	$2(a+1)$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0) \cdot f(2(a+1)) = \underbrace{a}_{<0}\underbrace{(3a-2)}_{<0}(a+2)\left\{\underbrace{\left(2a + \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}}_{>0}\right\}$$

$\therefore$ $a + 2 < 0$ $\therefore$ $a < -2$

(i)〜(iii) より．$\underline{a < -2,\ 0 < a < \frac{2}{3}}$ //