0002260549377999

学習院大学

2016年 文学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，P における C の接線と直交する直線を L とする．ただし，t は正の実数とする．

(1) L の方程式を求めよ．

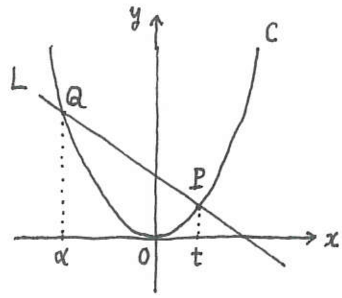
(2) L と C とで囲まれた部分の面積を S とする．t が正の実数全体を動くとき，S の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ．

(1) $y'=2x$ より，P における C の接線の傾きは $2t$

よって，L の傾きは $-\frac{1}{2t}$ であるから

$L: y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$　　すなわち，$L: y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$ //

(2) C と L の交点で P 以外のものを Q とする．



$$x^2-\left(-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ x^2+\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}=0$$

解と係数の関係より，Q の x 座標を α とおくと，

$\alpha+t=-\frac{1}{2t}$　　$\therefore\ \alpha=-t-\frac{1}{2t}$　…①

また，右図より，

$$S=\int_\alpha^t -\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}-x^2\,dx$$

$$=-\int_\alpha^t (x-\alpha)(x-t)\,dx$$

$\frac{1}{6}$ 公式

$$=\frac{1}{6}(t-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)\quad (\because ①より)$$

$t>0$ より，相加・相乗平均の関係から，$2t+\frac{1}{2t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}$

$=2$　　（等号成立は $t=\frac{1}{2}$）

よって，$S\geqq\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$

$\therefore$ S の最小値は，$\frac{1}{3}$ で，そのときの t の値は $t=\frac{1}{2}$ //