2016年 理学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 平面上で，曲線 $C : y = \dfrac{2}{x^2+1}$ を考える．

(1) C は変曲点を2つもつ．その2点の座標を求めよ．

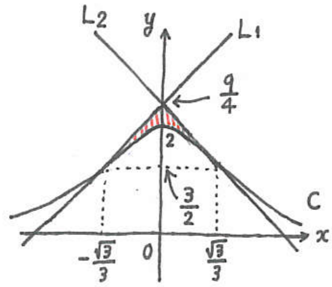
(2) (1)で求めた2点での C の接線を，それぞれ L_1，L_2 とする．2直線 L_1，L_2 と C とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$ ， $y'' = \dfrac{-4(x^2+1)^2+4x\cdot2\cdot2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{12\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{(x^2+1)^3}$

よって，$y''=0$ となるのは，$x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のときで，そのとき，$y = \dfrac{2}{\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{2}$

よって変曲点は，$\underline{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{2}\right)}$ //

(2) $y' = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$ より，接線の傾きは，$\dfrac{\pm4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2} = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$



右図では，傾きが正の方を L_1 とした．図形の対称性より，

$$S = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} -\frac{3\sqrt{3}}{4}x + \frac{9}{4} - \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2 + \frac{9}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 4\underline{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx}$$

$x=\tan\theta$ とおいて置換積分 $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$，

x	$0 \to \frac{\sqrt{3}}{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

$$= 2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \underline{\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{3}\pi}$$ //