



2014年理系第1問

1  $a, b$  を実数,  $a > 0$  として, 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$  の定める1次変換を  $f$  とする.  $f$  によって, 点  $P(1, 0)$  が点  $P_1$  に移され, 点  $P_1$  が点  $P_2$  に移されるものとする.  $P$  が線分  $P_1P_2$  の中点であるとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $a, b$  を求めよ.

(2) ある実数  $c$  に対して  $c\vec{OP} + \vec{OP}_1 = (v_1, v_2)$  とすると,

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ.  $c$  を求めよ.

(3)  $\vec{PP}_1 = (w_1, w_2)$  とする. すべての自然数  $n$  に対して

$$A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ.

(4) (2) と (3) の  $v_1, v_2, w_1, w_2$  に対して,  $\vec{OP} = s(v_1, v_2) + t(w_1, w_2)$  となる実数  $s, t$  を求め,  $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を  $n$  を用いて表せ. ただし,  $n$  は自然数である.