

2012年 医学部 第2問

2 以下の各問いに答えよ。

(1) e は自然対数の底とし、 a は正の実数とする。以下の問いに答えよ。

(i) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = a \log x - x$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-2x} = 0$ を示せ。

(iii) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^2 e^{-2t} dt$ を求めよ。

(2) $0 < t < \pi$ とする。曲線 $C: y = \sin \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 上の点 $P\left(t, \sin \frac{t}{2}\right)$ における C の接線を l_1 、点 P と原点を通る直線を l_2 とする。以下の問いに答えよ。

(i) 接線 l_1 と x 軸との交点の x 座標を t を用いて表せ。

(ii) $j = 1, 2$ について、直線 l_j 、 x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた三角形を x 軸のまわりに回転させてできた円錐の体積を V_j とする。また、曲線 C 、 x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させてできた回転体の体積を V とする。 V_1, V_2 および V を t を用いて表せ。

(iii) 極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}$ を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ は利用してよい。