福島県立医科大学

2014年 医学部 第1問　　1枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ．

(1) a は実数とする．極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\int_x^2 t^a\,dt$ を調べよ．

(2) α，β $\left(0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が $\tan\alpha\tan\beta=1$ を満たすとき，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の上を動くとき，$3x^2-16xy-12y^2$ の値が最大になる点 P の座標を求めよ．

(4) 公正なサイコロを2回振り，1回目に出た目を a，2回目に出た目を b とする．また，公正なコインを1回投げ，表が出たら $c=1$，裏が出たら $c=-1$ とする．O を原点とする座標平面上の2点 A，B を $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ ca)$ と定める．次の問いに答えよ．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になる確率を求めよ．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になる確率を求めよ．

(iii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の期待値を求めよ．

(iv) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の期待値を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になるときは面積を0とする．

(1) (i) $a=-1$ のとき．

$$(与式)=\lim_{x\to+0}\Big[\log t\Big]_x^2=\lim_{x\to+0}(\log 2-\log x)=\infty$$

(ii) $a\neq-1$ のとき．

$$(与式)=\lim_{x\to+0}\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_x^2=\lim_{x\to+0}\left(\frac{2^{a+1}}{a+1}-\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)=\begin{cases}\dfrac{2^{a+1}}{a+1} & (a>-1のとき)\\ \infty & (a<-1のとき)\end{cases}$$

以上をまとめて，

$$\begin{cases}\dfrac{2^{a+1}}{a+1} & (a>-1のとき)\\ \infty & (a\leqq-1のとき)\end{cases}$$ //

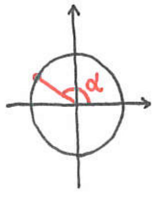
(2) $\tan\alpha\tan\beta=1$ のとき．$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=1$　$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=0$ となるので，$0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より．$0<\alpha+\beta<\pi$　$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ ■

(3) $x=2\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおけるので

$$\begin{aligned}3x^2-16xy-12y^2&=12\cos^2\theta-32\sin\theta\cos\theta-12\sin^2\theta\\&=12\cos2\theta-16\sin2\theta\\&=20\left\{\sin2\theta\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+\cos2\theta\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\right\}\\&=20\sin(2\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$\left(\alpha は．\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}，\sin\alpha=\dfrac{3}{5} をみたす実数\right)$



$\therefore$ 最大になるのは．$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき．

2枚目につづく

0001845184518999

福島県立医科大学

2014年 医学部 第1問　　2枚目／3枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ．

(1) aは実数とする．極限 $\lim_{x \to +0} \int_x^2 t^a \, dt$ を調べよ．

(2) α, β $\left(0 < \alpha \leqq \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ が $\tan\alpha \tan\beta = 1$ を満たすとき，$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) 点$\mathrm{P}(x,\ y)$が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の上を動くとき，$3x^2 - 16xy - 12y^2$ の値が最大になる点Pの座標を求めよ．

(4) 公正なサイコロを2回振り，1回目に出た目をa，2回目に出た目をbとする．また，公正なコインを1回投げ，表が出たら$c = 1$，裏が出たら$c = -1$とする．Oを原点とする座標平面上の2点A，Bを$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ ca)$と定める．次の問いに答えよ．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が垂直になる確率を求めよ．
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が平行になる確率を求めよ．
(iii) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$の期待値を求めよ．
(iv) △OABの面積の期待値を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$が平行になるときは面積を0とする．

(3) のつづき．

$$\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

よって，$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{4}{5}$ ，$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{5}$

$\begin{cases} 2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases}$ より． $\begin{cases} \frac{3}{2}\pi < 2\theta < 2\pi \\ \text{または．} \\ -\frac{\pi}{2} < 2\theta < 0 \end{cases}$ $\therefore \frac{3}{4}\pi < \theta < \pi$ $\therefore \cos\theta < 0,\ \sin\theta > 0$

$\therefore -\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ $\therefore \cos\theta > 0,\ \sin\theta < 0$

$\therefore \begin{cases} \cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \mp\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ （複号同順）　$\therefore$ Pの座標は $\underline{\left(\pm\frac{4}{\sqrt{5}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ （複号同順）//

(4) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (a, b) \cdot (b, ca) = ab + abc = ab(c+1)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \iff c = -1$ $\therefore$ 確率は $\underline{\frac{1}{2}}$ //

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より．$(a, b) = k(b, ca)$

$\therefore b^2 = ca^2 \iff a = b$ かつ $c = 1$ $\therefore$ 確率は．$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{12}}$ //

3枚目につづく．

0001845184518999

福島県立医科大学

2014年 医学部 第1問

3枚目／3枚.

数理 石井K

1 以下の各問いに答えよ．

(1) a は実数とする．極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\int_x^2 t^a\,dt$ を調べよ．

(2) $\alpha,\ \beta\ \left(0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が $\tan\alpha\tan\beta=1$ を満たすとき，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の上を動くとき，$3x^2-16xy-12y^2$ の値が最大になる点Pの座標を求めよ．

(4) 公正なサイコロを2回振り，1回目に出た目を a，2回目に出た目を b とする．また，公正なコインを1回投げ，表が出たら $c=1$，裏が出たら $c=-1$ とする．Oを原点とする座標平面上の2点A，Bを $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(b,\ ca)$ と定める．次の問いに答えよ．

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になる確率を求めよ．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になる確率を求めよ．

(iii) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の期待値を求めよ．

(iv) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の期待値を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が平行になるときは面積を0とする．

(4) のつづき.

(i) で内積は. $ab(c+1)$ となることが分かっている.

(iii)
$$(\text{期待値})=\frac{1}{6\cdot6\cdot2}\left\{2(1\cdot1+1\cdot2+\cdots+1\cdot6+2\cdot1+\cdots+6\cdot6)+0(1\cdot1+\cdots+6\cdot6)\right\}$$
$$=\frac{1}{36}\underbrace{(1+2+\cdots+6)(1+2+\cdots+6)}$$

展開すると. 等しいことがわかる.

$$=\frac{21^2}{36}$$
$$=\frac{49}{4}$$

(iv) $S=\frac{1}{2}|ca^2-b^2|$

$c=1$ のとき　　$c=-1$ のとき.

$$\therefore(\text{期待値})=\frac{1}{6\cdot6\cdot2}\left\{\frac{1}{2}\sum_{1\leqq a,b\leqq6}|a^2-b^2|+\frac{1}{2}\sum_{1\leqq a,b\leqq6}(a^2+b^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{72}\left\{\frac{1}{2}\sum_{1\leqq a<b\leqq6}(b^2-a^2+a^2+b^2)+\frac{1}{2}\sum_{1\leqq b\leqq a\leqq6}(a^2-b^2+a^2+b^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{72}\left\{\sum_{1\leqq a<b\leqq6}b^2+\sum_{1\leqq b\leqq a\leqq6}a^2\right\}$$
$$=\frac{1}{72}\sum_{1\leqq a,b\leqq6}\{\max(a,b)\}^2$$

右の表より.

$$=\frac{1}{72}(1\cdot1+4\cdot3+9\cdot5+16\cdot7+25\cdot9+36\cdot11)=\frac{791}{72}$$

(注) max (a, b) は a, b のうち. 小さくない方

b\a	1	2	3	4	5	6
1	1	4	9	16	25	36
2	4	4	9	16	25	36
3	9	9	9	16	25	36
4	16	16	16	16	25	36
5	25	25	25	25	25	36
6	36	36	36	36	36	36

$\{\max(a,b)\}^2$ の値