2016年 基幹理工・創造理工・先進理工 第1問

1枚目/2枚

1 正の整数 m, n に対して $f(m,\ n)$ が次の等式を満たすように定められている.

$$\begin{cases} f(1,\ 1)=1, \quad f(2,\ 2)=6, \quad f(3,\ 3)=20 \\ f(m,\ n)=2f(m-1,\ n) \quad (m \geqq 2) \cdots ① \\ f(m,\ n)+3f(m,\ n-2)=3f(m,\ n-1)+f(m,\ n-3) \quad (n \geqq 4) \cdots ② \end{cases}$$

次の問に答えよ.

(1) $f(m,\ 1)$ および $f(1,\ n)$ をそれぞれ m, n の式で表せ.

(2) $f(6,\ 32)$ の値を求めよ.

(3) 任意の正の整数 l に対して, $f(m,\ n)=l$ を満たす正の整数 m, n が存在することを示せ.

(1) ①に $n=1$ を代入して.

$$f(m,1)=2f(m-1,1) \quad (m \geqq 2)$$

よって. m についての数列 $\{f(m,1)\}$ は 初項 $f(1,1)=1$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$\underline{f(m,1)=2^{m-1}}$$ //

同様に, ②に $m=1$ を代入して.

$$f(1,n)+3f(1,n-2)=3f(1,n-1)+f(1,n-3) \quad (n \geqq 4)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2) &= f(1,n-1)-2f(1,n-2)+f(1,n-3) \\ &= f(1,n-2)-2f(1,n-3)+f(1,n-4) \\ &= \quad \vdots \\ &= f(1,3)-2f(1,2)+f(1,1) \cdots ③ \end{aligned}$$

くり返し用いる.

ここで, ①に $m=2$, $n=2$ を代入すると,

$f(2,2)=2f(1,2)$ よって $f(2,2)=6$ より, $f(1,2)=3$

①に $m=2$, $n=3$ を代入すると,

$$f(2,3)=2f(1,3)$$

また, ①に $m=3$, $n=3$ を代入すると,

$f(3,3)=2f(2,3)$ よって $f(3,3)=20$ より, $f(2,3)=10$ $\therefore f(1,3)=5$

③にこれらを代入して. $f(1,n)-2f(1,n-1)+f(1,n-2)=0$

$$\begin{aligned} \therefore f(1,n)-f(1,n-1) &= f(1,n-1)-f(1,n-2) \\ &\ \ \vdots \\ &= f(1,2)-f(1,1) \end{aligned}$$

早稲田大学

2016年 基幹理工・創造理工・先進理工 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

1　正の整数 m, n に対して $f(m,\ n)$ が次の等式を満たすように定められている.

$$\begin{cases} f(1,\ 1)=1, \quad f(2,\ 2)=6, \quad f(3,\ 3)=20 \\ f(m,\ n)=2f(m-1,\ n) \quad (m \geqq 2) \\ f(m,\ n)+3f(m,\ n-2)=3f(m,\ n-1)+f(m,\ n-3) \quad (n \geqq 4) \end{cases}$$

次の問に答えよ.

(1) $f(m,\ 1)$ および $f(1,\ n)$ をそれぞれ m, n の式で表せ.

(2) $f(6,\ 32)$ の値を求めよ.

(3) 任意の正の整数 l に対して, $f(m,\ n)=l$ を満たす正の整数 m, n が存在することを示せ.

(1) のつづき.

$\therefore\ f(1,n)-f(1,n-1)=2$

$\therefore$ 数列 $\{f(1,n)\}$ は 初項 1, 公差 2 の等差数列

$\therefore\ \underline{f(1,n)=2n-1}$ //

(2) ① に $m=6$, $n=32$ を代入して, くり返すと.

$f(6,32)=2f(5,32)=2^2f(4,32)=\cdots=2^5f(1,32)\overset{(1)より.}{=}32\cdot 63=\underline{2016}$ //

(3) (2) と同様にして.

$f(m,n)=2f(m-1,n)=2^2f(m-2,n)=\cdots=2^{m-1}f(1,n)\overset{(1)より.}{=}2^{m-1}\cdot(2n-1)$

任意の正の整数 l は

$l=2^{P_1}\cdot 3^{P_2}\cdot 5^{P_3}\cdots\cdots$ と素因数分解できる (P_i はすべて 0 以上の整数)

よって, $m=P_1+1$ (正の整数), $n=\frac{1}{2}(\underbrace{1+3^{P_2}\cdot 5^{P_3}\cdots\cdots}_{偶数})$ (正の整数)

ととれば, よい

よって. 任意の正の整数 l に対して. $f(m,n)=l$ をみたす 正の整数 m, n は存在する ▨