福島大学

2015年 人文B 第3問

$\boxed{3}$ 次の問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ を求めなさい.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x-3}$ を求めなさい.

(3) 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めなさい.

(4) 曲線 $y = xe^x + 1$ の $x=1$ に対応する点における接線と法線の方程式を求めなさい.

(1) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ とおくと.

$$S = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} \quad \cdots ①$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \cdots ②$$

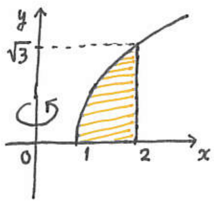
①−②より. $\displaystyle \frac{1}{2}S = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$

$$\therefore\ S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n}$$

$$= \underline{2 - \frac{n+2}{2^n}}\ //$$

(3) $y = \sqrt{x^2-1}$ より



$x^2 - y^2 = 1 \quad (y \geqq 0)$

$$V = (\text{円柱}) - \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,dy$$

$$= \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} - \pi\int_0^{\sqrt{3}} y^2+1\,dy$$

$$= 4\sqrt{3}\pi - \pi\left[\frac{y^3}{3} + y\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3}\pi - \pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \underline{2\sqrt{3}\pi}\ //$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x+1)} = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\log|x-3| - \log|x+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log 2 - \log 2 - \log 3 + 0\right)$$

$$= \underline{-\frac{1}{4}\log 3}\ //$$

(4) $y' = e^x + xe^x$

$= (x+1)e^x$

$\therefore$ 接線の傾きは. $2e$, 法線の傾きは $-\dfrac{1}{2e}$

接点は $(1, e+1)$

$\therefore$ 接線は. $y = 2e(x-1) + e + 1$

$\therefore\ \underline{y = 2ex - e + 1}\ //$

法線は. $y = -\dfrac{1}{2e}(x-1) + e + 1$

$\therefore\ \underline{y = -\dfrac{1}{2e}x + \dfrac{1}{2e} + e + 1}\ //$