00000437722659999

福島大学

2010年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C: y = x^3 + 2ax^2 + bx$ と直線 $\ell: y = ax$ が $x \geqq 0$ で定義されており，原点以外でこれらの曲線 C と直線 ℓ が接するものとする．次の問いに答えなさい．なお，$a \neq 0$ とする．

(1) 曲線 C と直線 ℓ との共有点が二つあることを示し，それらの共有点の座標を求めなさい．また，a のとりうる値の範囲を求めなさい．

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる面積を S_1，これら二つの共有点と点 $(0,\ -1)$ からなる三角形の面積を S_2 とする．$S_1 = S_2$ となる a の値を求めなさい．

(1) $x^3+2ax^2+bx-ax=0$

$x(x^2+2ax+b-a)=0$ …①

C と ℓ が原点以外で接するので，$x^2+2ax+b-a=0$ の判別式を D とすると，

$D/4 = a^2-(b-a)=0$ $\quad \therefore b = a^2+a$

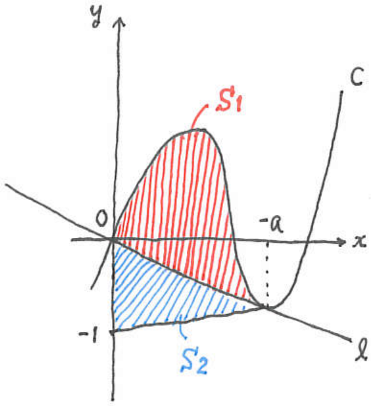
このとき①は，$x(x^2+2ax+a^2)=0$

$\therefore x(x+a)^2=0$ $\quad a \neq 0$ より，$x=0,\ -a$

したがって C と ℓ の共有点は $(0,0)$ と $(-a,-a^2)$ の2つある ■

共有点は $\underline{(0,0),\ (-a,-a^2)}$ で，$x \geqq 0$ より，$\underline{a<0}$

(2) 右の図より，



$$S_1 = \int_0^{-a} x^3+2ax^2+(a^2+a)x-ax\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}ax^3+\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^{-a}$$
$$= \frac{a^4}{4}-\frac{2}{3}a^4+\frac{a^4}{2}$$
$$= \frac{a^4}{12}$$

$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-a) = -\frac{a}{2}$

$S_1 = S_2$ より，$\frac{a^4}{12} = -\frac{a}{2}$

$\therefore a(a^3+6)=0$

$a<0$ より，$\underline{a = -\sqrt[3]{6}}$