福島大学

2015年 第3問

数理 石井K

3 第 n 項が

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ がある．この数列の第1項から第 n 項までの和を S_n で表すとき，次の問いに答えなさい．

(1) $n \geqq 2$ のとき，S_n を n の式で表しなさい．また，S_{10} の値を求めなさい．

(2) $S = 2\sum_{k=8}^{70} a_k$ の値を求めなさい．

(1) $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

$$\therefore\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$\therefore\ n \geqq 2$ のとき．$S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

$$= \underline{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}\ /\!/$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 35}{4 \cdot 11 \cdot 12} = \underline{\frac{175}{264}}\ /\!/$$

(2) $S = 2\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{70} a_k}_{= S_{70}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{7} a_k}_{= S_7}\right)$

$$= 2\left(\frac{70 \cdot 215}{4 \cdot 71 \cdot 72} - \frac{7 \cdot 26}{4 \cdot 8 \cdot 9}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{7}{4 \cdot 8 \cdot 9}\left(\frac{2150}{71} - 26\right)$$

$$= \frac{7}{144} \cdot \frac{304}{71}$$

$$= \underline{\frac{133}{639}}\ /\!/$$

(別) $S = 2\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{71} - \dfrac{1}{72}\right)$

として (1) と同様に計算してもよい