2015年 人文B 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 次の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=x^2+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めなさい．

(2) 等式

$$f(x)=x^2+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$$

をみたす関数 $f(x)$ は存在しないことを示しなさい．

(1) $a=\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ とおく． $f(x)=x^2+a$ より

$$a=\int_0^{\pi}(t^2+a)\sin t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi} t^2(-\cos t)'dt+a\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[-t^2\cos t\right]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} t(\sin t)'dt+a\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[-t^2\cos t\right]_0^{\pi}+2\left[t\sin t\right]_0^{\pi}-2\left[-\cos t\right]_0^{\pi}+a\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t-a\cos t\right]_0^{\pi} \quad \cdots ①$$

$$=\pi^2-2+a-2+a$$

$\therefore\ a=4-\pi^2$ 　　$\therefore\ \underline{f(x)=x^2+4-\pi^2}$ //

(2) $b=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$ とおくと (1)の① において．π を $\frac{\pi}{2}$ に，a を b に おきかえて

$$b=\left[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t-b\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi-2+b$$

$\therefore\ \pi=2$ となり．これをみたす b は存在しない

したがって 題意をみたす $f(x)$ は存在しない ▨