

2010年 初等教育 第4問

4 空間上に相異なる4点 O, A, B, C があり、線分 OA, OB, OC は互いに直交している。次の問いに答えよ。

(1) 4点 O, A, B, C からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する。この点を G とする。線分 OA の中点を M とする。 \vec{OA} と \vec{MG} が直交することを用いて、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{2} |\vec{OA}|^2$$

となることを示せ。ただし、 $\vec{OA} \cdot \vec{OG}$ は \vec{OA} と \vec{OG} の内積とする。

(2) (1) を用いて、

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

が成り立つことを示せ。

(3) $O(0, 0, 0), P(1, \sqrt{3}, 0), Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), R\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする。このとき線分 OP, OQ, OR は互いに直交していることを示せ。また、4点 O, P, Q, R を通る球面の半径を求めよ。