

2011年 国際文理（環境科学） 第4問

4 座標平面上で原点  $O$  を中心に一定の角  $\theta$  で回転移動する 1 次変換を  $f$  とし、一定の正の数  $r$  で各点  $(x, y)$  を点  $(rx, ry)$  に移す相似変換を  $g$  とする。また、 $g$  と  $f$  の合成変換  $g \circ f$  を表す行列を  $K(r, \theta)$  とする。原点  $O$  と異なる座標平面上の点  $P(a, b)$  に対して、点  $Q(c, d)$  を次で定める：

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = K(r, \theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

次の問に答えなさい。

- (1)  $K(r, \theta)$  を求めなさい。  $r$  を  $a, b, c, d$  を用いて表しなさい。
- (2)  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  ならば、 $ad - bc > 0$  であることを示しなさい。
- (3)  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  ならば、 $\triangle OPQ$  の面積が  $\frac{1}{2}(ad - bc)$  に等しくなる。このことを用いて、図のように、点  $P_1, P_2, P_3$  を時計の針が回る方向と反対回りに順番に配置した三角形  $\triangle P_1P_2P_3$  の面積が

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$$

に等しいことを示しなさい。ただし、 $x_4 = x_1, y_4 = y_1$  とする。

