

2015年 国際文理（環境科学）第4問

4  $c, d$  を正の定数とする. 図1のように点  $O$  は極,  $OX$  は始線,  $A$  は  $OX$  上の点で, 点  $A$  の極座標を  $(\frac{c}{d}, 0)$  とする. 点  $A$  を通り  $OX$  に垂直な直線を  $l$  とする. 点  $P$  は  $l$  に関して  $O$  と同じ側にあり, 関係式

$$d = \frac{OP}{PH}$$

を満たすように動いている. ただし,  $H$  は  $P$  から  $l$  に下ろした垂線と  $l$  との交点である. 以下の問に答えなさい.

(1) 点  $P$  の極座標を  $(r, \theta)$  とする. 方程式

$$r(d \cos \theta + 1) = c$$

が成り立つことを示しなさい.

(2)  $O$  を通り,  $OX$  に対する傾きがゼロでない直線が動点  $P$  の軌跡と交わる2点を  $P_1, P_2$  とし, その極座標をそれぞれ  $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$  とする. ただし,  $0 < \theta_1 < \pi, \pi < \theta_2 < 2\pi$  とする. 線分  $P_1P_2$  が点  $O$  で  $1:2$  に内分されるならば,

$$r_1 = \frac{3}{4}c, \quad \cos \theta_1 = \frac{1}{3d}, \quad d > \frac{1}{3}$$

となることを図2を参考にして示しなさい.

(3) (2) の条件をみたす点  $P_1, P_2$  を通る直線の傾きが  $\sqrt{9d^2 - 1}$  であることを示しなさい.