

2015年 国際文理（環境科学）第4問

4 c, d を正の定数とする. 図1のように点 O は極, OX は始線, A は OX 上の点で, 点 A の極座標を $(\frac{c}{d}, 0)$ とする. 点 A を通り OX に垂直な直線を l とする. 点 P は l に関して O と同じ側にあり, 関係式

$$d = \frac{OP}{PH}$$

を満たすように動いている. ただし, H は P から l に下ろした垂線と l との交点である. 以下の問に答えなさい.

(1) 点 P の極座標を (r, θ) とする. 方程式

$$r(d \cos \theta + 1) = c$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) O を通り, OX に対する傾きがゼロでない直線が動点 P の軌跡と交わる2点を P_1, P_2 とし, その極座標をそれぞれ $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ とする. ただし, $0 < \theta_1 < \pi, \pi < \theta_2 < 2\pi$ とする. 線分 P_1P_2 が点 O で $1:2$ に内分されるならば,

$$r_1 = \frac{3}{4}c, \quad \cos \theta_1 = \frac{1}{3d}, \quad d > \frac{1}{3}$$

となることを図2を参考にして示しなさい.

(3) (2) の条件をみたす点 P_1, P_2 を通る直線の傾きが $\sqrt{9d^2 - 1}$ であることを示しなさい.