2015年 国際文理（国際教養） 第4問

$\boxed{4}$ どの頂角も 180° より小さい四角形ABCD（図1）があり，線分ACと線分BDの交点をWとする．この四角形を2つの三角形 $\triangle$ABC と $\triangle$ACD に分割し（図2），それぞれの三角形の重心を G_1，G_1' とする．また，同じ四角形を2つの三角形 $\triangle$ABD と $\triangle$BCD に分割し（図3），それぞれの三角形の重心を G_2，G_2' とする．さらに線分 G_1G_1' と線分 G_2G_2' の交点をGとする．実数 l，m は

$$\overrightarrow{AC} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AD}$$

を満たすとする．以下の問に答えなさい．

(1) $\overrightarrow{AG_1}$，$\overrightarrow{AG_1'}$，$\overrightarrow{AG_2}$ はそれぞれ，

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{AG_1'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

となるが，$\overrightarrow{AG_2'}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表しなさい．

(2) $0 < p_1 < 1$，$0 < p_2 < 1$ に対して，線分 G_1G_1' を $p_1 : 1 - p_1$ に内分する点を H_1 とし，線分 G_2G_2' を $p_2 : 1 - p_2$ に内分する点を H_2 とする．このとき，

$$\overrightarrow{AH_1} = (1 - p_1)\overrightarrow{AG_1} + p_1\overrightarrow{AG_1'}$$
$$\overrightarrow{AH_2} = (1 - p_2)\overrightarrow{AG_2} + p_2\overrightarrow{AG_2'}$$

となるが，特に $H_1 = H_2 = G$ としたとき，p_1，p_2 を l，m を用いて表しなさい．

(3) (2)と同じく $H_1 = H_2 = G$ としたとき，以下の式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{G_1'G}{G_1G} = \frac{m}{l} = \frac{BW}{DW}$$

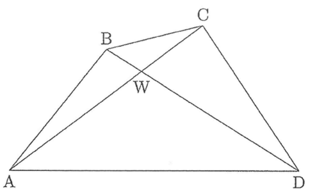

図1

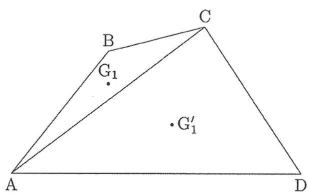

図2

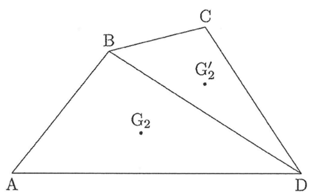

図3