

2015年 国際文理 (国際教養) 第1問



1 指数関数について、以下の間に答えなさい。

(1) $a > 0$, $a \neq 1$ とする。実数 M に対し、 $a^t \geq M$ となるように実数 t の範囲を求めなさい。(2) 実数 M に対して、実数 t_1, t_2 は

$$\begin{cases} M-2 = 2^{t_1} \\ M = 2^{t_2} \end{cases}$$

を満たすとする。このとき、 $t_1 + t_2 \geq 3$ となるように M の範囲を求めなさい。(3) (2) の2つの式を満たす t_1, t_2 に対して、 $t_2 - t_1 \geq 4$ となるように M の範囲を求めなさい。(1) $a^t \geq M$ において、 $M \leq 0$ のとき t はすべての実数 $M > 0$ とする。 $0 < a < 1$ のとき、両辺、底が a の対数をとって、 $t \leq \log_a M$ $a > 1$ のとき、同様に、 $t \geq \log_a M$

以上より、

$$\begin{cases} M \leq 0 \text{ のとき、} t \text{ はすべての実数} \\ M > 0, 0 < a < 1 \text{ のとき、} t \leq \log_a M \\ M > 0, a > 1 \text{ のとき、} t \geq \log_a M \end{cases} \quad "$$
(2) $M-2 = 2^{t_1} > 0$ より、 $M > 2$ が必要である。このとき、 $t_1 = \log_2(M-2)$, $t_2 = \log_2 M$ であるから、

$$\log_2(M-2) + \log_2 M \geq 3 \quad \therefore \log_2 M(M-2) \geq 3 \quad \therefore M(M-2) \geq 2^3$$

$$\therefore M^2 - 2M - 8 \geq 0 \quad \therefore (M-4)(M+2) \geq 0 \quad \text{ここで、} M > 2 \text{ より、} \underline{M \geq 4} \quad "$$

$$(3) t_2 - t_1 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2 M - \log_2(M-2) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{M}{M-2} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{M-2} \geq 2^4$$

$$\Leftrightarrow M \geq 16(M-2)$$

$$\Leftrightarrow 15M \leq 32$$

$$\Leftrightarrow M \leq \frac{32}{15}$$

$$\text{これと、} M > 2 \text{ より、} \underline{2 < M \leq \frac{32}{15}} \quad "$$