0001957272408999

福岡女子大学

2013年 国際文理（国際教養） 第2問

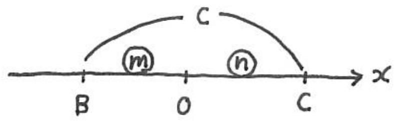
数理 石井K

$\boxed{2}$ $m>0$, $n>0$ とする．座標平面の x 軸上に原点Oをはさんで左側に点B，右側に点Cがあり，線分BCの長さを c とする．ただし，点Bと点Cは共に点Oと異なるものとする．以下の問に答えなさい．

(1) 原点Oが線分BCを $m:n$ に内分するとき，B，Cの x 座標を m, n, c を用いて表しなさい．

(2) 座標平面上の任意の点 $A(a,\ b)$ は，次の関係式を満たすことを示しなさい．

$$\frac{n}{m+n}\mathrm{AB}^2+\frac{m}{m+n}\mathrm{AC}^2=\mathrm{AO}^2+\frac{n}{m}\mathrm{BO}^2$$



(1) 右の図より．

B, Cの x 座標はそれぞれ $-\dfrac{mc}{m+n}$, $\dfrac{nc}{m+n}$ //

(2) (1)より．

$$\mathrm{AB}^2=\left(a+\frac{mc}{m+n}\right)^2+b^2,\quad \mathrm{AC}^2=\left(a-\frac{nc}{m+n}\right)^2+b^2,$$

$$\mathrm{AO}^2=a^2+b^2,\quad \mathrm{BO}^2=\left(-\frac{mc}{m+n}\right)^2$$

$\therefore$ (与式の左辺)−(与式の右辺)

$$=\frac{n}{m+n}\left\{\left(a+\frac{mc}{m+n}\right)^2+b^2\right\}+\frac{m}{m+n}\left\{\left(a-\frac{nc}{m+n}\right)^2+b^2\right\}-(a^2+b^2)-\frac{n}{m}\left(\frac{mc}{m+n}\right)^2$$

$$=\frac{n}{m+n}\left(a^2+b^2+\frac{2mac}{m+n}+\frac{m^2c^2}{(m+n)^2}\right)+\frac{m}{m+n}\left(a^2+b^2-\frac{2nac}{m+n}+\frac{n^2c^2}{(m+n)^2}\right)-a^2-b^2-\frac{mnc^2}{(m+n)^2}$$

$$=a^2+b^2+\frac{2mnac}{(m+n)^2}+\frac{m^2nc^2}{(m+n)^3}-\frac{2mnac}{(m+n)^2}+\frac{mn^2c^2}{(m+n)^3}-a^2-b^2-\frac{mnc^2}{(m+n)^2}$$

$$=\frac{mnc^2(m+n)}{(m+n)^3}-\frac{mnc^2}{(m+n)^2}$$

$$=0$$ ∎