

2011年 国際文理（環境科学） 第4問

4 座標平面上で原点 O を中心に一定の角 θ で回転移動する 1 次変換を f とし、一定の正の数 r で各点 (x, y) を点 (rx, ry) に移す相似変換を g とする。また、 g と f の合成変換 $g \circ f$ を表す行列を $K(r, \theta)$ とする。原点 O と異なる座標平面上の点 $P(a, b)$ に対して、点 $Q(c, d)$ を次で定める：

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = K(r, \theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

次の問に答えなさい。

- (1) $K(r, \theta)$ を求めなさい。 r を a, b, c, d を用いて表しなさい。
- (2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ならば、 $ad - bc > 0$ であることを示しなさい。
- (3) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ならば、 $\triangle OPQ$ の面積が $\frac{1}{2}(ad - bc)$ に等しくなる。このことを用いて、図のように、点 P_1, P_2, P_3 を時計の針が回る方向と反対回りに順番に配置した三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ の面積が

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$$

に等しいことを示しなさい。ただし、 $x_4 = x_1, y_4 = y_1$ とする。

