

2014年工学部第1問

1 関数 $f(x) = \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減表をかけ。ただし、凹凸は調べなくてよい。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx$ を求めよ。

$$(1) \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \text{ より, } \cos^3 x = \frac{\cos^3 x + 3\cos x}{4}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{3}{4} \sin 3x - \frac{3}{4} \sin x = -\frac{3}{4} \cdot 2 \sin 2x \cos x$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ とするとは, } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin x dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3 \cdot (-dt)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$f(x)$	0	-	0	-	0	+	0	+	0
$f'(x)$	1	↓	0	↓	-1	↑	0	↑	1

$t = \cos x$ とおいて置換積分

$$\begin{array}{l} x \parallel 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t \parallel 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \quad dt = -\sin x dx$$

$$= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -t^3 dt$$

$$= \left[-\frac{t^4}{4} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{16} //$$