0002053186497999

福岡大学

2015年 理系 第3問

数理 石井K

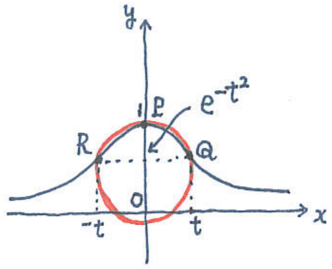
$\boxed{3}$ 曲線 $y=e^{-x^2}$ 上の3点 P(0, 1), Q(t, e^{-t^2}), R($-t$, e^{-t^2}) を通る円を C とする．円 C の半径 r を t の関数とみて $r(t)$ と表すと，$r(t)=\boxed{}$ である．また，極限 $\lim_{t\to 0} r(t)$ の値は $\boxed{}$ である．ただし，e は自然対数の底とする．

$\frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}-\frac{t^2}{e^{-t^2}-1}\right)$　　$\frac{1}{2}$

右図のように図形は y 軸に関して対称であるから，

円の中心は y 軸上にある．

よって，円の中心は，線分PQの垂直2等分線と y 軸の交点である．



線分PQの中点は $\left(\frac{t}{2}, \frac{e^{-t^2}+1}{2}\right)$，直線PQの傾きは，$\frac{e^{-t^2}-1}{t}$

∴ 線分PQの垂直2等分線は，

$$y=-\frac{t}{e^{-t^2}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{e^{-t^2}+1}{2}$$

$x=0$ を代入すると，$y=\frac{t^2}{2(e^{-t^2}-1)}+\frac{e^{-t^2}+1}{2}$　　∴ 中心は $\left(0, \frac{t^2}{2(e^{-t^2}-1)}+\frac{e^{-t^2}+1}{2}\right)$

$$\therefore\ r(t)=1-\frac{t^2}{2(e^{-t^2}-1)}-\frac{e^{-t^2}+1}{2}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}-\frac{t^2}{e^{-t^2}-1}\right)}\ /\!/$$

$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$　（微分係数の定義）

∴ $h=-t^2$ として　$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t^2}-1}{-t^2}=1$　　∴ $\lim_{t\to 0}-\frac{t^2}{e^{-t^2}-1}=1$

$$\therefore\ \underline{\lim_{t\to 0} r(t)=\frac{1}{2}}\ /\!/$$