0002054095497999

2015年 工・薬学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 点 $(1,\ 1)$ において接線と直交する直線を ℓ とする．曲線 $y=f(x)$，直線 ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{(2\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

∴ $(1,1)$ における接線は，$y=\dfrac{1}{4}(x-1)+1$　∴ $\underline{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}}$ //

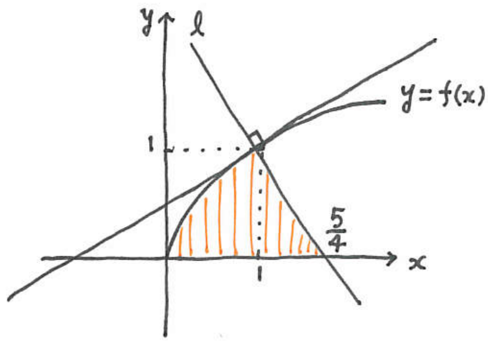
(2) (1) より ℓ の傾きは，-4 であるから

$\ell:\ y=-4(x-1)+1$

∴ $\ell:\ y=-4x+5$

また，(1) より，$f'(x)>0$

∴ グラフは右のようになる



∴ $S=\underbrace{\displaystyle\int_0^1\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx}_{}+\displaystyle\int_1^{\frac{5}{4}}-4x+5\,dx$

$t=\sqrt{x}$ とおいて置換積分 $\begin{array}{c|c} x & 0\to1 \\ \hline t & 0\to1\end{array}$，$dx=2t\,dt$

$=\displaystyle\int_0^1\frac{2t}{1+t}\cdot 2t\,dt+\Big[-2x^2+5x\Big]_1^{\frac{5}{4}}$

$=\displaystyle\int_0^1 4t-4+\frac{4}{t+1}\,dt+\frac{1}{8}$

$=\Big[2t^2-4t+4\log(t+1)\Big]_0^1+\dfrac{1}{8}$

$=\underline{4\log 2-\dfrac{15}{8}}$ //