お茶の水女子大学

2015年 化学・情報科学科（共通問題） 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

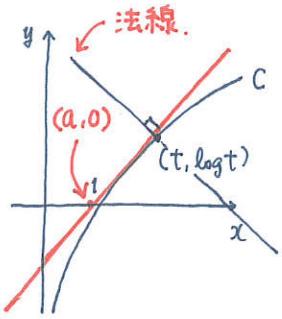
$\boxed{3}$ $x>0$ で定義された曲線 $y=\log x$ を C とする．以下の問いに答えよ．

ただし，$\lim\limits_{x\to 0} x\log x = 0$ を用いてよい．a を定数とする．

(1) 点 $(a,\ 0)$ から C に何本の接線が引けるか調べよ．

(2) C の法線で点 $(a,\ 0)$ を通るものがちょうど1本あることを示せ．

(3) 原点 $(0,\ 0)$ を通る C の接線，x 軸，曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．



(1) 接点を $(t,\ \log t)$（ただし，$t>0$）とすると．

$y'=\frac{1}{x}$ より．接線は． $\underline{y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t}$ …(*)　すなわち． $y=\frac{1}{t}x-1+\log t$ となる．

これが $(a,0)$ を通るとき． $0=\frac{1}{t}\cdot a-1+\log t$

$$\Leftrightarrow \underline{t(1-\log t)=a}$$

この方程式の実数解の個数 = 接線の本数
（t に関する）（異なる）

ここで，$f(t)=t(1-\log t)$ とおくと．

$$f'(t)=1-\log t+t\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)$$
$$=-\log t$$

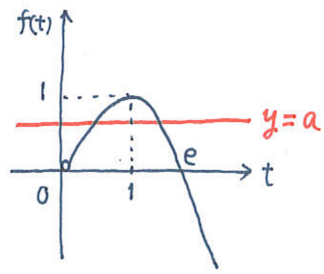
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

$\therefore$ $f'(t)=0$ となるのは．$t=1$

また．$\lim\limits_{x\to+0} x\log x=0$ より． $\lim\limits_{t\to+0} f(t)=0$

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=-\infty$　これと増減表より．

グラフは右のようになる．



$\therefore$ 接線の本数は． $\begin{cases} 0\text{本}\ (a>1\text{ のとき}) \\ 1\text{本}\ (a=1,\ a\leqq 0\text{ のとき}) \\ 2\text{本}\ (0<a<1\text{ のとき}) \end{cases}$ —//

(2) (1)の接線の式(*)より．法線は． $y=-t(x-t)+\log t \Leftrightarrow y=-tx+t^2+\log t$

これが $(a,0)$ を通るとき． $0=-ta+t^2+\log t$

$$\Leftrightarrow \underline{t+\frac{\log t}{t}=a}$$

この方程式の異なる実数解の個数 = 法線の本数

ここで，$g(t)=t+\frac{\log t}{t}$ とおくと

0002122187787999

お茶の水女子大学

2015年 化学・情報科学科（共通問題） 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ $x>0$ で定義された曲線 $y=\log x$ を C とする．以下の問いに答えよ．

ただし，$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$ を用いてよい．a を定数とする．

(1) 点 $(a,\ 0)$ から C に何本の接線が引けるか調べよ．

(2) C の法線で点 $(a,\ 0)$ を通るものがちょうど1本あることを示せ．

(3) 原点 $(0,\ 0)$ を通る C の接線，x 軸，曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) のつづき．

$$g'(t) = 1 + \frac{1-\log t}{t^2} = \frac{t^2+1-\log t}{t^2}$$

さらに，$h(t) = t^2+1-\log t$ とおくと．

$$h'(t) = 2t - \frac{1}{t} = \frac{2\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{t}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ $h'(t)=0$ となるのは，$t>0$ において，$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}+1-\log\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log 2 > 0$$

$\therefore$ $t>0$ において，$h(t)>0$　よって，$g'(t)>0$

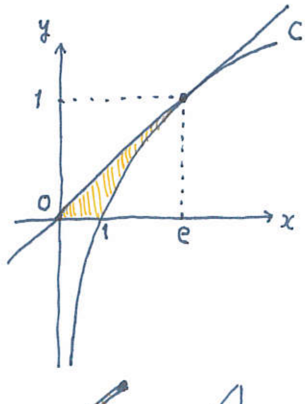
これより，$t>0$ において，$g(t)$ は単調増加．

さらに，$\lim_{t\to+0} g(t) = \lim_{t\to+0} t+\frac{\log t}{t} = -\infty$，$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} t+\frac{\log t}{t} = \infty$

$\therefore$ 方程式 $t+\frac{\log t}{t} = a$ は a の値によらず，ちょうど1個の実数解をもつ．

すなわち，$(a,0)$ を通る法線がちょうど1本ある ▨

(3) (1) より，原点を通る C の接線は，$y=\frac{1}{e}x$，接点は $(e,1)$



$$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot e\cdot 1 - \int_1^e \log x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e - \int_1^e (x)'\log x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e - \Big[x\log x\Big]_1^e + \int_1^e dx$$

$$= \underline{\frac{e}{2}-1}\ //$$