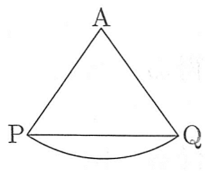
2011年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 平面上の点Aを中心とする半径aの円から，中心角が60°で$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=a$となる扇形APQを切り取る．つぎに線分APとAQを貼り合わせて，Aを頂点とする直円錐Kを作り，これを点Oを原点とする座標空間におく．

A，Pはそれぞれz軸，x軸上の正の位置にとり，扇形APQの弧PQはxy平面上のOを中心とする円Sになるようにする．
また弦PQから定まるKの側面上の曲線をCとする．



以下の問いに答えよ．

(1) Sの半径をbとする．S上の点$\mathrm{R}(b\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$に対し，$K$上の母線ARと$C$の交点をMとする．$b$と線分AMの長さを$a$と$\theta$を用いて表せ．

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$を$xy$平面に正射影したベクトルの長さを$r$とする．$r$を$a$と$\theta$を用いて表し，定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\,d\theta$$

を求めよ．ただし，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$を$xy$平面に**正射影したベクトル**とは$\overrightarrow{\mathrm{OE'}}=(a_1,\ a_2,\ 0)$のことである．