



2015年第3問

3 p と q は正の整数とする。2次方程式 $x^2 - 2px - q = 0$ の2つの実数解を α , β とする。ただし $\alpha > \beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし $\alpha^0 = 1$, $\beta^0 = 1$ と定める。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、 a_n は整数であることを示せ。
- (3) 自然数 n に対し、 $\frac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。 p と q が $q < 2p + 1$ を満たすとき、 b_n を a_n を用いて表せ。