

2012年理工（数・建築・電気電子情報工）第3問

3 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $x > 0$ で定義された関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 0)$$

で定める. ただし, \log は自然対数を表す.

$t > 1$ とするとき, 座標平面において曲線 $y = f_n(x)$ の $x \leq t$ の部分, x 軸, 直線 $x = t$ の3つで囲まれている図形の面積を $S_n(t)$ とする. また, 4点 $(1, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f_n(t))$, $(1, f_n(t))$ を頂点とする長方形の面積を $T_n(t)$ とする.

- (1) 関数 $f_n(x)$ が極大となるときの x の値と, そのときの $f_n(x)$ の極大値を求めよ.
- (2) t が $t > 1$ を動くとき, $T_n(t) - S_n(t)$ が最大となる t の値を求めよ.
- (3) $S_1(t)$ と $S_n(t)$ ($n \geq 2$) を求めよ.
- (4) 各 $n \geq 2$ に対して $T_n(t) = S_n(t)$ となる t ($t > 1$) がただ1つあることを示せ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ となることを用いてもよい.