

2012年理(数学科)第1問

1 半径2の円板が $x$ 軸上を正の方向に滑らずに回転するとき、円板上の点 $P$ の描く曲線 $C$ を考える。円板の中心の最初の位置を $(0, 2)$ 、点 $P$ の最初の位置を $(0, 1)$ とする。

(1) 円板がその中心のまわりに回転した角を $\theta$ とするとき、 $P$ の座標は

$$(2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta)$$

で与えられることを示せ。

(2) 点 $P(2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta)$  ( $0 < \theta < 2\pi$ )における曲線 $C$ の法線と $x$ 軸との交点を $Q$ とする。線分 $PQ$ の長さが最大となるような点 $P$ を求めよ。ここで、 $P$ において接線に直交する直線を法線という。

(3) 曲線 $C$ と $x$ 軸、2直線 $x = 0$ 、 $x = 4\pi$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。