



2011年医学部第4問

4 関数 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) は次の条件を満たしている.

(i) $f_0(x) = e^{2x} + 1$

(ii) $f_n(x) = \int_0^x (n+2t)f_{n-1}(t) dt - \frac{2x^{n+1}}{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$ を求めよ.

(2) $f_n(x)$ の具体的な形を推測し, その結果を数学的帰納法で証明せよ.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f'_n\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$ を求めよ. ただし, $0 < r < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ となることを用いてよい.