0002080099197999

福井大学

2015年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 2つの関数 $f(x)=x^2+4$, $g(x)=x^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1)で求めた接線と，曲線 $y=g(x)$ との交点を A，B とする．曲線 $y=g(x)$ の，点 A における接線と点 B における接線との交点を C とする．点 C の座標を求めよ．また，点 C は曲線 $y=x^2-4$ 上にあることを示せ．

(3) 直線 AB と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積は，a の値によらずに一定であることを示せ．

(1) $f'(x)=2x$　∴接線の傾きは $f'(a)=2a$，接点は (a, a^2+4)

∴接線の方程式は，$y=2a(x-a)+a^2+4$　　∴ $\underline{y=2ax-a^2+4}$ //

(2) $x^2-(2ax-a^2+4)=0$

∴ $(x-a)^2=4$　∴ $x=a\pm 2$　∴ $A(a-2, (a-2)^2)$, $B(a+2, (a+2)^2)$

$g'(x)=2x$ より 点Aでの接線は．$y=2(a-2)\{x-(a-2)\}+(a-2)^2$

∴ $y=2(a-2)x-(a-2)^2$

同様に点Bでの接線は．$y=2(a+2)x-(a+2)^2$

$2(a+2)x-(a+2)^2-2(a-2)x+(a-2)^2=0$ より．

$8x=8a$　∴ $x=a$　∴ $\underline{C(a, a^2-4)}$ //

∴ $y=x^2-4 \iff y-x^2+4=0$

Cの座標を代入すると．$a^2-4-a^2+4=0$ ∴点Cは $y=x^2-4$ 上にある ▨

(3) $S=\int_{a-2}^{a+2} 2ax-a^2+4-x^2\,dx$

$=-\int_{a-2}^{a+2}\{x-(a-2)\}\{x-(a+2)\}\,dx$

$=\frac{1}{6}\{a+2-(a-2)\}^3$　　$\frac{1}{6}$公式を使った．

$=\frac{32}{3}$ (一定) ▨