0001855454418999

福井大学

2014年 医学部 第1問

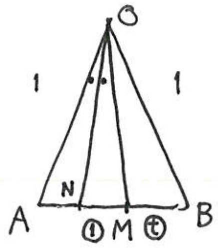
数理 石井K

$\boxed{1}$ 三角形OABはOA＝OB＝1を満たす二等辺三角形とする．tを$\dfrac{1}{2}<t<1$を満たす定数とし，辺ABを$1:t$に内分する点をM，∠AOMの二等分線と辺ABの交点をNとする．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) OM＝sとおく．$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$s$，$t$を用いて表せ．

(2) AN＝BMのとき，内積$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$を$t$を用いて表せ．

(3) $\cos\angle\mathrm{BOM}=x$とおく．(2)の仮定のもとで，さらに$x^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$が成り立っているとき，辺ABの長さを求めよ．



(1) AN : NM ＝ 1 : s より.

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{s}{1+s}\overrightarrow{a}+\frac{1}{1+s}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{s}{1+s}\overrightarrow{a}+\frac{1}{1+s}\left(\frac{t}{1+t}\overrightarrow{a}+\frac{1}{1+t}\overrightarrow{b}\right)$$

$$=\underline{\frac{s+st+t}{(1+s)(1+t)}\overrightarrow{a}+\frac{1}{(1+s)(1+t)}\overrightarrow{b}}\ //$$

(2) $\mathrm{AN}=\dfrac{1}{1+t}\cdot\mathrm{AB}\cdot\dfrac{1}{1+s}$, $\mathrm{BM}=\dfrac{t}{1+t}\cdot\mathrm{AB}$ より

$$\mathrm{AN}=\mathrm{BM}\iff s=\frac{1}{t}-1\ \cdots ①$$

(1) より. $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=\dfrac{t^2}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{2t}{(1+t)^2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$

また, $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=s^2$ より, $t^2+1+2t\cdot\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=s^2(1+t)^2\ \cdots ②$

①, ② より, $\underline{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{1-3t^2}{2t^3}}\ //$

(3) (1) より. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{1+t}|\overrightarrow{b}|^2=\dfrac{1-3t^2}{2t^2(1+t)}+\dfrac{1}{1+t}\ \cdots ③$

一方, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cdot x=\dfrac{1-t}{t}\cdot x\ \cdots ④$

③, ④ より. $x=\dfrac{1}{2t}$, $x^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ に代入して, $(2t+1)(3t-2)=0$

$\dfrac{1}{2}<t<1$ なので, $t=\dfrac{2}{3}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-\dfrac{9}{16}$ これより $\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{9}{16}$

余弦定理より. $\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{9}{16}\right)$ $\underline{\mathrm{AB}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}}\ //$