

2016年中等教育第1問



1 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき

$$\cos 2x + \cos x + 1 > 0$$

を満たす x の範囲を求めよ。(2) $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。(3) 正方形の各辺を n 等分した点から向かい合う辺に垂線を下ろす。このとき、正方形の4つの辺とこれらの垂線を利用してできる長方形のうち、正方形でないものの個数を n を用いて表せ。(1) $\cos 2x = 2\cos^2x - 1$ より 不等式は

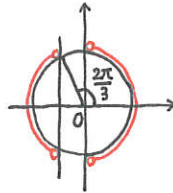
$$2\cos^2x + \cos x > 0 \quad \text{と変形}$$

$$\therefore \cos x(2\cos x + 1) > 0$$

$$\therefore \cos x < -\frac{1}{2}, \quad 0 < \cos x$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2\pi \text{ なので}$$

$$\underline{0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi} \quad "$$

(2) $(a^2+5)(b-3) = 6$

$$a^2+5 \geq 5 \text{ より,}$$

$$\begin{cases} a^2+5 = 6 \\ b-3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{(a, b) = (-1, 4), (1, 4)} \quad "$$

(3) 長方形は全部で $n+1C_2 \times n+1C_2 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ 個あり、

そのうち、

1辺の長さが1の正方形は、 n^2 個ある。

$$\sphericalangle \quad 2 \quad \sphericalangle \quad (n-1)^2 \quad \sphericalangle$$

⋮

$$\sphericalangle \quad k \quad \sphericalangle \quad (n+1-k)^2 \quad \sphericalangle$$

$$\therefore \text{正方形は全部で} \quad \sum_{k=1}^n (n+1-k)^2 = (n+1)^2 \sum_{k=1}^n 1 - 2(n+1) \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= n(n+1)^2 - n(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore \text{正方形でない長方形は、} \quad \underline{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{12}n(n-1)(n+1)(3n+2)} \quad "$$