愛媛大学

2014年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とし，t は実数とする．A は，$A^3=E$ を満たす2次の正方行列とする．

(1) $(A-tE)(A^2+tA+t^2E)$ を t と E を用いて表せ．

(2) $t \neq 1$ のとき $A-tE$ は逆行列をもつことを示せ．

(3) 次の3つの命題を証明せよ．

(i) $A=E$ ならば，$A^2+A+E \neq O$ である．

(ii) $A^2+A+E \neq O$ ならば，$A-E$ は逆行列をもたない．

(iii) $A-E$ が逆行列をもたないならば，$A=E$ である．

(1). (与式) $= A^3 - t^3E$

$= \underline{(1-t^3)E}$ //

(2) $t \neq 1$ のとき，(1)より，$(A-tE)\cdot\dfrac{1}{1-t^3}(A^2+tA+t^2E)=E$

$\therefore$ $A-tE$ は逆行列 $\dfrac{1}{1-t^3}(A^2+tA+t^2E)$ をもつ ■

(3)

(i) $A=E$ ならば $A^2+A+E = 3E \neq O$ ■

(ii) $A^2+A+E \neq O$ かつ $A-E$ が逆行列 $(A-E)^{-1}$ をもつと仮定して背理法で示す．

(1) において，$t=1$ のときを考えると，$(A-E)(A^2+A+E)=O$

両辺に左から $(A-E)^{-1}$ をかけると，$A^2+A+E=O$ となり

$A^2+A+E\neq O$ に矛盾する． $\therefore$ $A^2+A+E\neq O \Rightarrow A-E$ は逆行列をもたない ■

(iii) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと，$A-E=\begin{pmatrix}a-1&b\\c&d-1\end{pmatrix}$ 逆行列をもたないので，$(a-1)(d-1)-bc=0$

$\therefore$ $ad-bc=a+d-1$ …① ハミルトン・ケーリの定理より．

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ 　$A^3-E=(a+d)A^2-(ad-bc)A-E$

$=(a+d)\{(a+d)A-(ad-bc)E\}-(ad-bc)A-E$

①を使う $\longrightarrow$ $=\{\underbrace{(a+d)^2-(a+d)+1}_{>0}\}(A-E)$

$A^3=E$ より，$A^3-E=O$ なので，$A-E=O$

$\therefore$ $A=E$ ■