



2015年 理学部・工学部 第4問

4 n を自然数とし、曲線 $y = n \sin \frac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第1象限における交点の座標を (p_n, q_n) とする。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $n \sin \frac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ。
 (2) 不等式 $p_n > \frac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ。
 (3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、不等式

$$(*) \quad \left(n \sin \frac{1}{n} \right) x \leq n \sin \frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して、次の (i), (ii) に答えよ。

(i) 不等式 $p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ。

(ii) x 軸、直線 $x = p_n$ 、および曲線 $y = n \sin \frac{x}{n}$ ($0 \leq x \leq p_n$) で囲まれた領域の面積を S_n とするとき、 S_n を p_n を用いて表せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(4) $0 \leq x \leq 1$ のとき、(3) の不等式 (*) が成り立つことを示せ。